**ძვირფასო სტუდენტებო,**
**დავალების შესრულების დაწყებამდე,**
**გთხოვთ, ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს**

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 2

# *დავალება № 16 (ნაწილი პირველი). ფუნქციის მონოტონურობის /შუალედების დადგენა. ფუნქციის ექსტრემუმები*

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემული სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან, კერძოდ, ლექცია16-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

სავარჯიშოები №

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1- ბ,ზ, ი | 1- გ,კ,ლ,მ | 2- ა,ე,ზ | 2- ბ,დ,ვ,ი | 6 | 7 | 8- გ,ზ | 8- ბ,ვ,თ | 9- ა,დ | 9- ბ,ე,ი | 10- ა,გ | 10- ბ,ე |
| 11 | 12 | 13 | 14 | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | |

**ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა**

1-ბ

იპოვეთ $f(t)=t^3+3t^2+1$ ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის შუალედები.

**ამოხსნა.** (ა) ფუნქცია მოცემულია მრავალწევრით, ე. ი. განსაზღვრულია ყველგან და არის წარმოებადი. მას შეიძლება ქონდეს მხოლოდ სტაციონარული ტიპის კრიტიკული წერტილი — სადაც წარმოებული 0-ის ტოლია, $f'(t)=0$.

(ბ) ვიპოვოთ ისინი —

$$f'(t)=0 \quad f'(t)=\left(t^3+3t^2+1\right)'=\left(t^3\right)'+\left(3t^2\right)'+1'=3t^2+6t.$$

ამოვხსნათ $f'(t)=0$ განტოლება:

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow 3t^2+6t=0 \Leftrightarrow 3t(t+2)=0 \Leftrightarrow t=0 \vee t+2=0.$$

გამოდის, სტაციონარული კრიტიკული წერტილებია $t_1=0$ და $t_2=-2$.

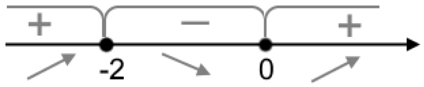
(გ) მოვნიშნოთ ესენი რიცხვით ღერძზე:


განსაზღვრის არეს დაიყოფა სამ შუალედად: $(-\infty;-2],[-2;0],[0;+\infty)$.

(დ) როგორც ვიცით, ორ მეზობელ კრიტიკულ წერტილს შორის წარმოებულს ერთი და იგივე ნიშანი აქვს. კერძოდ, თუ რომელ ნიშანთან გვაქვს საქმე ამას დავადგენთ, ამ შუალედის რომელიმე წერტილზე მნიშვნელობის გამოთვლით. მაგალითად, რიცხვები -3, -1 და 1, შესაბამისად ეკუთვნის პირველ, მეორე და მესამე შუალედს. ისინი სათანადო შუალედების „წარმომადგენლებია“. ვნახოთ რა ნიშანი აქვს თითოეულ მათგანზე $f'(t)=3t^2+6t$ წარმოებულს:

$$f'(-3)=3(-3)^2+6(-3)=9>0; \quad f'(-1)=3(-1)^2+6(-1)=-3<0; \quad f'(1)=3\cdot1^2+6\cdot1=9>0.$$

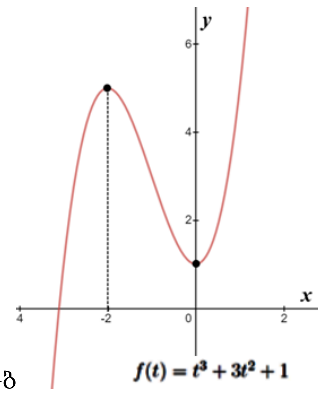
ე.ი. წარმოებულის „ნიშან-მუდმივობის“ შუალედები—„წარმოებულის ნიშნების განაწილება“, დიაგრამაზე ასე გამოიყურება:




(ე) გამოდის, შუა შუალედზე ფუნქცია კლებადია, დანარჩენებზე — ზრდადი. დიაგრამაზე სიმბოლურად ამას გამოსახავს ნაჩვენები ისრები.

**პასუხი:** $f(t)=t^3+3t^2+1$ ფუნქციის ზრდადობის შუალედებია: $(-\infty;-2]$ და $[0;+\infty)$, ხოლო კლებადობის: $[-2;0]$.

**შენიშვნა:** ეს შედეგი შესაბამისობაშია მოცემული ფუნქციის გრაფიკთან (იხ. ნახ. N1-ბ). ის აგებულია ე. წ. „გრაფიკული კალკულატორის“ მეშვეობით. ასეთი კალკულატორები მრავლადაა ინტერნეტში (ნახეთ, მაგალითად , desmos, რომლის გამოყენებით არის ეს და ყველა მომდევნო გრაფიკი აგებული).




ნახ. N1-ბ

არ უნდა შეგვექმნას ილუზია, კომპიუტერული კალკულატორი ზედმეტს ხდის ფუნქციის გამოკვლევის ცოდნას, რომელსაც ახლა ეუფლებით, ამ სასწავლო კურსში. კალკულატორი მხოლოდ მაშინ შეიძლება გამოვიყენოთ ეფექტურად და რისკების გარეშე, როცა წინასწარ გვაქვს გარკვეული წარმოდგენა რა უნდა მოგვცეს მან.

დაისახეთ მიზნად, დამოუკიდებლად ისწავლოთ ასეთი კალკულატორების გამოყენება—დასაწყისში ააგეთ მათი მეშვეობით გრაფიკები, რომლებიც თქვენთვის ცნობილია...

## 1-ზ

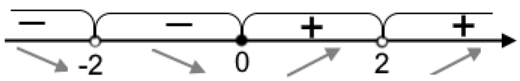
იპოვეთ $f(t)=\dfrac{1}{4-t^2}$ ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის შუალედები.

**ამოხსნა.** (ა) ვიპოვოთ განსაზღვრის არე. ის შედგება ყველა იმ t რიცხვისგან, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $4\text{-}t^2\neq 0$, ანუ $t^2\neq 4$, ანუ $t\neq\pm 2$ . ე.ი. $D_f=(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;+\infty)$.

(ბ) ვიპოვოთ $f(t)$ ფუნქციის წარმოებული:

$$f'(t)=\left(\frac{1}{4-t^2}\right)'=\frac{1'\cdot(4-t^2)-1\cdot(4-t^2)'}{(4-t^2)^2}=\frac{2t}{(4-t^2)^2}.$$

(გ) ცხადია $f'(t)=0$ პირობა სრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა მრიცხველი $2t=0$ ანუ როცა $t=0$. რიცხვები $\pm 2$ და ეს 0, ღერძს დაყოფს ოთხ შუალედად.

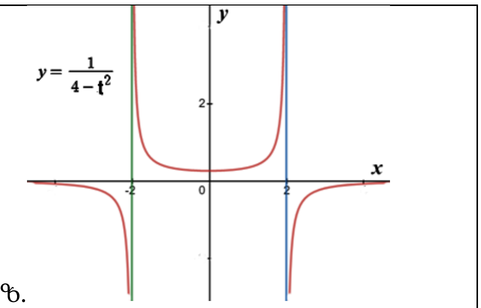



მნიშვნელი, როგორც კვადრატი, დადებითია. მაშასადამე $f'(t)$-ს ნიშანი ემთხვევა $2t$ მრიცხველის. ამიტომ, წარმოებულის ნიშნების განაწილების სურათი ისეთია, როგორც ნაჩვენებია ზედა ნახაზზე, მონოტონურობის აღმნიშვნელ ისრებთან ერთად.

ე) ანუ, ფუნქცია კლებადია $(-\infty;0)$ და $(-2;0]$ შუალედებზე, ზრდადი — $[0;2)$ და $(2;+\infty)$ შუალედებზე.

**პასუხი.** $f(t)=\dfrac{1}{4-t^2}$ ფუნქციის ზრდადობის შუალედებია $[0;2)$ და $(2;+\infty)$, ხოლო კლებადობის — $(-\infty;-2)$ და $(-2;0]$.

**შენიშვნა:** ეს შედეგი შესაბამისობაშია მოცემული ფუნქციის გრაფიკთან — ნახ. N1-ზ.




ნახ. N1-ზ.

## 1-ი

იპოვეთ $h(u)=\sqrt{9-u^2}$ ფუნქციის ზრდადობის და კლებადობის შუალედები.

**ამოხსნა.** (ა) განსაზღვრის არე შედგება ყველა იმ $u$ რიცხვისგან, რომლისთვისაც ფესვქვეშა გამოსახულება არა-უარყოფითია: $9-u^2\ge 0$ —

$$9-u^2\ge 0 \Leftrightarrow u^2\le 9 \Leftrightarrow \sqrt{u^2}\le\sqrt{9} \Leftrightarrow |u|\le 3 \Leftrightarrow -3\le u\le 3.$$

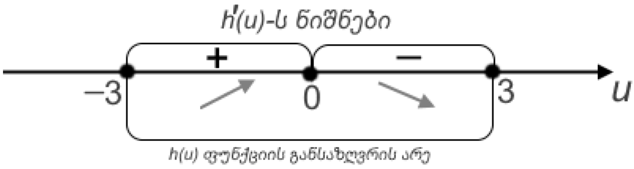
მაშასადამე, ფუნქცია განსაზღვრულია [-3;3] სეგმენტზე.

(ბ) ვიპოვოთ წარმოებული და კრიტიკული წერტილები—განსაზღვრის არის ის შიგა წერტილები, სადაც წარმოებული არ არსებობს, ან ნულის ტოლია.

$$h'(u)=\left(\sqrt{9-u^2}\right)'=\left(\left(9-u^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}\left(9-u^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(9-u^2\right)'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{9-u^2}}(-2u)=\frac{-u}{\sqrt{9-u^2}}.$$

ეს წარმოებული არ არის განსაზღვრული ფუნქციის განსაზღვრის არის ბოლოებზე — $\pm 3$ რიცხვებზე, რადგან მათთვის მნიშვნელია ნულია. ამის მიუხედავად ეს წერტილები არაა კრიტიკულთა კატეგორიაში, რადგან განსაზღვრის არის ბოლოებია. ვეძიოთ კრიტიკულ წერტილთა ის სახეობა, სადაც წარმოებული 0-ის ტოლია — ე.წ. სტაციონარული წერტილები. წარმოებული წილადია. ეს კი ნული იქ არის, სადც მრიცხველი 0-ის ტოლია. ცხადია ასეთია წერტილი $u=0$.

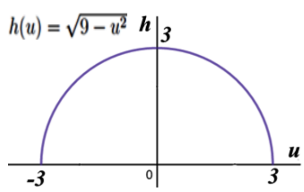
(გ) ეს ერთადერთი სტაციონარული წერტილი განსაზთვრის არეს ყოფს ორ მონაკვეთად. თითოეულზე რა ნიშანი აქვს წარმოებულის გამომსახველ წილადს, ეს აშკარაა. გვაქვს წარმოებულის ნიშნების განაწილების ასეთი სურათი:




(დ) ე.ი. (-3;0) შუალედზე ზრდადია. აქედან დავასკვნით, რომ ის ასეთივედ დარჩება ბოლოების მიერთებით მიღებულ [-3;0] შუალედზეც. ზუსტად ასევე დავასკვნით — [0;3] სეგმენტზე ფუნქცია კლებადია.

**პასუხი.** $h(u)=\sqrt{9-u^2}$ ფუნქციის ზრდადობის შუალედია: $[-3;0]$, ხოლო კლებადობის — $[0;3]$.

შენიშვნა. ეს შედეგი შესაბამისობაშია ფუნქციის გრაფიკთან —იხ. ნახ. N1-ი.




ნახ. N1-ი.

## 2-ა

იპოვეთ $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2+2$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და მოახდინეთ მათი კლასიფიკაცია.

**ამოხსნა.** (ა) ფუნქცია მრავალწევრით არის მოცემული, ე.ი. განსაზღვრულია და წარმოებადია ყველგან. ე.ი. მას შეიძლება ქონდეს მხოლოდ სტაციონარული ტიპის კრიტიკული წერტილები. საჭიროა დავადგინოთ, რომელ მათგანზე გვაქვს მაქსიმუმი, რომელზე — მინიმუმი და რომელზე — არცერთი.

(ბ) ვიპოვოთ სტაციონარული წერტილები:

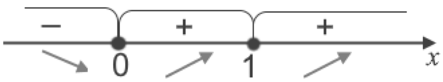
$$f'(x)=\left(3x^4-8x^3+6x^2+2\right)'=12x^3-24x^2+12x=12x\left(x^2-2x+1\right)=12x\left(x-1\right)^2$$

ამოვხსნათ განტოლება $f'(x)=0$:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 12x\left(x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee \left(x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1.$$

ე.ი. სტაციონარული წერტილებია $x=0$ და $x=1$.

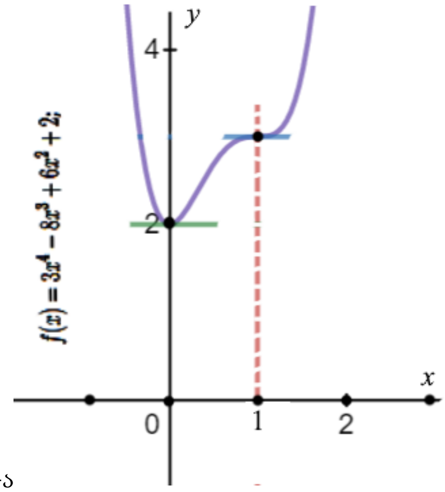
(გ) ესენი განსაზღვრის არეს (მთელ ღერძს) ყოფს სამ შუალედად. თითოეული მათგანიდან ავიღოთ თითო-თითო წარმომადგენელი, მაგალითად -1, ½ და 2. წარმოებულის ფორმულაში, ამათი ჩასმით დავრწმუნდებით — გვაქვს ნიშანთა ასეთი განაწილება:




(დ) ვხედავთ $x=0$ წერტილის მარცხნივ და მარჯვნივ წარმოებულს სხვადასხვა ნიშნები აქვს. ე.ი. ამ წერტილზე ფუნქციას აქვს ექსტრემუმი, კერძოდ მინიმუმი. მეორე კრიტიკულ წერტილზე — $x=1$, ექსტრემუმი არ გვაქვს.

**პასუხი.** ფუნქციას აქვს მხოლოდ პირველი გვარის კრიტიკული წერტილები (სტაციონარული წერტილები): $x=0,\quad x=1$. ამათგან $x=0$ ლოკალური მინიმუმის წერტილია, ხოლო $x=1$ არ არის ექსტრემუმის წერტილი.

**შენიშვნა**: ჩვენი დასკვნის სისწორეზე მიანიშნებს ამ ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. N2-ა).




ნახ. N2-ა

## 2-ე

იპოვეთ $g(x)=\left(x-1\right)^5$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და მოახდინეთ მათი კლასიფიკაცია.

**ამოხსნა.** (ა) ფუნქცია მრავალწევრითაა მოცემული, ე.ი. მისი განსაზღვრის არეა მთელი ღერძი; წარმოებადია ყველგან, ე.ი. შესაძლებელია ქონდეს მხოლოდ სტაციონარული ტიპის კრიტიკული წერტილები.

(ბ) ვიპოვოთ სტაციონარული წერტილები —

$$g'(x)=\left[\left(x-1\right)^5\right]'=5\left(x-1\right)^{5-1}\cdot\left(x-1\right)=5\left(x-1\right)^4$$

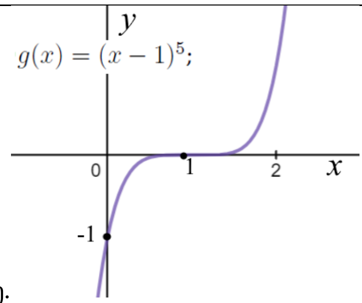
განტოლება $g'(t)=0$ იგივეა რაც $5\left(x-1\right)^4=0$. ცხადია x=1 არის ერთადერთი ამონახსენი — ე.ი. 1 ერთადერთი სტაციონარული წერტილია.

(გ) მის მარცხნივ და მარჯვნივ ფუნქციის წარმოებული დადებითია, რადგან ლუწ მე-4 ხარისხში გვაქვს ხარისხი.

ანუ ფუნქცია ყველგან ზრდადია. ეს ნიშნავს, ფუნქციას საერთოდ არა აქვს ექსტრემუმები.

**პასუხი.** $g(x)=\left(x-1\right)^5$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილია $x=1$; ის არ არის ექსტრემუმის წერტილი.

**შენიშვნა**: ჩვენი დასკვნის სისწორეზე მიანიშნებს ამ ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. N2-ე).




ნახ. N 2-ე.

## 2-ზ

იპოვეთ $f(t)=\dfrac{t}{t^2+3}$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილები და მოახდინეთ მათი კლასიფიკაცია.

**ამოხსნა.** (ა) ფუნქცია მრავალწევრთა შეფარდებით არის მოცემული და განსაზღვრულია ყველა იმ წერტილზე, სადაც მნიშვნელი არ უდრის 0-ს. ამ შემთხვევაში მნიშვნელი აშკარად დადებითია, ამიტომ განსაზღვრის არეა მთელი ღერძი. გაწარმოების ფორმულიდან ცხადია, ასეთ ფუნქციას ყველა წერტილზე აქვს წარმოებული. ანუ მოსალოდნელია მხოლოდ სტაციონარულ წერტილთა არსებობა.

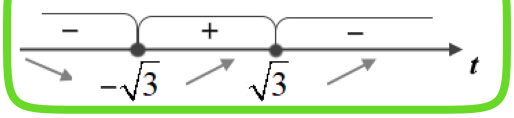
(ბ) ვიპოვოთ სტაციონარული წერტილები —

$$f'(t)=\left(\frac{t}{t^2+3}\right)'=\frac{t'(t^2+3)-t(t^2+3)'}{\left(t^2+3\right)^2}=\frac{t^2+3-2t^2}{\left(t^2+3\right)^2}=\frac{3-t^2}{\left(t^2+3\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{3}-t\right)\left(\sqrt{3}+t\right)}{\left(t^2+3\right)^2}.$$

(ბ) ამოვხსნათ განტოლება $f'(t)=0$:

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow \frac{3-t^2}{\left(t^2+3\right)^2} \Leftrightarrow t^2=0 \Leftrightarrow t=\pm\sqrt{3}\cdot$$

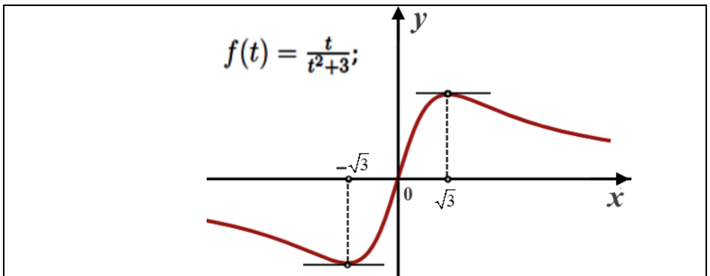
ე.ი. სტაციონარული წერტილებია $\pm\sqrt{3}$. მოვნიშნოთ ისინი ღერძზე (მომდევნო დიაგრამა). $f'(t)$ წარმოებულის ნიშანი იგივე რაც $3-t^2$ გამოსახულების ნიშანი, წილადის მრიცხველში. ამიტომ წარმოებულის ნიშნების განაწილება ასეთია:




მართლაც, თუ $t$ აღებულია შუა შუალედიდან, მაშინ მისი მოდული არ აღემატება $\sqrt{3}$-ს: $|t|<\sqrt{3}$. აქედან $|t|^2<\left(\sqrt{3}\right)^2$ ანუ $t^2<3$. ამიტომ $f'(t)$ წარმოებულის გამოსახულებაში მრიცხველიც დადებითია, საიდან გვაქვს $f'(t)>0$. თუ $t$ განაპირა შუალედიდანაა მაშინ მისი მოდული მეტია $\sqrt{3}$-ზე და ცხადია $f'(t)<0$.

(გ) წარმოებულის ნიშნების ამ განაწილებიდან ცხადია, რომ ორივე სტაციონარული წერტილი ექსტრემუმის წერტილია, უფრო ზუსტად, პირველი, -$\sqrt{3}$ არის მინიმუმის წერტილი, მეორე — მაქსიმუმის.

**პასუხი.** $f(t)=\dfrac{t}{t^2+3}$ ფუნქციის კრიტიკული წერტილებია: $t=-\sqrt{3},\quad t=\sqrt{3}$; აქედან $t=-\sqrt{3}$ არის ლოკალური მინიმუმის წერტილი, ხოლო $t=\sqrt{3}$ — ლოკალური მაქსიმუმის. [იხ. ნახ. N 2-ზ]




ნახ. N 2-ზ.

## 6

შეარჩიეთ a, b და c მუდმივები ისე, რომ $f(x)=ax^2+bx+c$ ფუნქციამ ლოკალურ მაქსიმუმს მიაღწიოს (5;12) წერტილზე და მისი y-გადაკვეთა იყოს 3-ის ტოლი.

**ამოხსნა.** ფუნქციის y-გადაკვეთა, ესაა მისი მნიშვნელობა $x=0$ წერტილზე— $f(0)$. ამოცანის პირობით კი ეს არის 3. ანუ $f(0)=3$. მოცემულობით $f(x)=ax^2+bx+c$. საიდანაც $f(0)=c$. შეჯერებით ცხადია $c=3$.

პირობის მიხედვით, $x=5$ წერტილზე ფუნქციის მნიშვნელობაა 12: $f(5)=12$. ანუ $a\cdot 5^2+b\cdot 5+c=12$.

აქ $c=3$. ამიტომ გვაქვს $25a+5b=9$.

$f(x)$ ფუნქციას $x=5$ წერტილზე აქვს მაქსიმუმი. ფერმას თეორემის ძალით $f'(5)=0$. აქ

$$f'(x)=\left(ax^2+bx+c\right)'=2ax+b.$$

მივიღეთ $10a+b=0$. ეს ტოლობები ერთროულად უნდა სრულდებოდეს. ე.ი. გვაქვს სისტემა:

$$\begin{cases}25a+5b=9\\10a+b=0\end{cases}$$

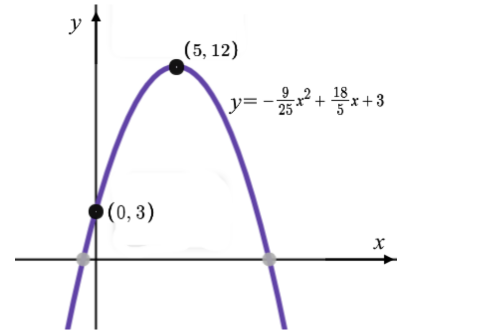
ამოვხსნათ ის:

$$\begin{cases}25a+5b=9\\10a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25a+5b=9\\b=-10a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25a+5(-10a)=9\\b=-10a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-25a=9\\b=-10a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{9}{25}\\b=\dfrac{18}{5}\end{cases}$$

შევიტანოთ a, b და c პარამეტრების მიღებული მნიშვნელობები ფუნქციის გამოსახულებაში. მივიღებთ: $f(x)=-\frac{9}{25}x^2+\frac{18}{5}x+3$.

**პასუხი:** $a=-\frac{9}{25}$, $b=\frac{18}{5}$, $c=3$.

**შენიშვნა.** მიღებული ფუნქციის გრაფიკი (ნახ. N 6) გვიჩვენებს, რომ ის აკმაყოფილებს ამოცანაში მოთხოვნილ პირობებს.



ნახ. N 6.

8-გ

„პირველი რიგის წარმოებულის წესის“ გამოყენებით იპოვეთ $f(x)=x^4-4x^3+10$ ფუნქციის ექსტრემუმები.

**ამოხსნა.** (ა) ეს ფუნქცია მოცემულია მრავალწევრის მეშვეობით. ე.ი. ის მთელ ღერძზეა განსაზღვრული და წარმოებადი.

(ბ) $f(x)$ ფუნქციას ექსტრემუმი შეიძლება ქონდეს სტაციონარულ წერტილთა შორის — იქ სადაც $f'(x)=0$. ვიპოვოთ ისინი —

$$f'(x)=\left(x^4-4x^3+10\right)'=4x^3-12x^2=4x^2(x-3);\text{ ე.ი. } f'(x)=4x^2(x-3)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^2(x-3)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=3$$

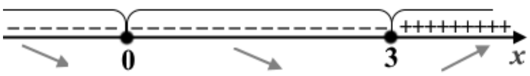
როგორც ვხედავთ სტაციონარული წერტილებია $x_1=0$ და $x_2=3$. „პირველი რიგის წარმოებულის წესის“ მიხედვით, ამათგან ექსტრემუმის წერტილი არის ის, რომლის მარცხნივ და მარჯვნივ წარმოებულს განსხვავებული ნიშნები აქვს (სადაც წარმოებული ნიშანს იცვლის). მეზობელ სტაციონარულ წერტილებს შორის წარმოებულის ნიშნების დადგენა შეიძლება მათგან თითო-თითოდ აღებულ ელემენტებზე („წარმომადგენლებზე“) მნიშვნელობათა გამოთვლებით.

სტაციონარული წერტილები $x_1=0$ და $x_2=3$ რიცხვით ღერძს ყოფს შუალედებად: $(-\infty;0], [0;3], [3;+\infty)$.

რიცხვები -1, 1 და 4 მოთავსებულია ამ შუალედებში, შესაბამისად („წამომადგენლები“). გავსინჯოთ $f'(x)=4x^2(x-3)$ წარმოებულის ნიშნები. დავასკვნით:

$$f'(-1)<0;\ f'(1)<0;\ f'(4)>0.$$

მაშასადამე წარმოებულის ნიშნები ასეა განაწილებული:

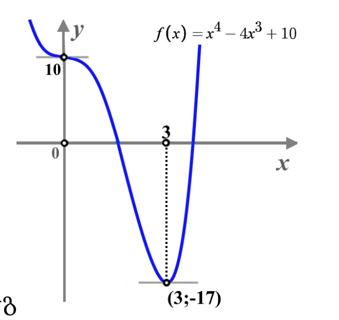



როგორც ვხედავთ, სტაციონარული წერტილებიდან, ნიშნის ცვლა ხდება 3-ზე. აქ კლებადობას ცვლის ზრდადობა, ანუ 3 არის მინიმუმის წერტილი, მინიმუმის მნიშვნელობაა.

$$f(3)=\left(x^4-4x^3+10\right)\Big|_{x=3}=3^4-4\cdot3^3+10=-17$$

**პასუხი.** $y_{\min}=f(3)=-17$

**შენიშვნა.** ეს ლოკალური (ფარდობითი) მინიმუმი იმავდროულად არის გლობალური (აბსოლუტური)—ანუ მოცემული ფუნქცია უფრო მცირე მნიშვნელობას არსად ღებულობს — იხ. ნახ. N8-გ.



ნახ. N8-გ

**8-ზ**

„პირველი რიგის წარმოებულის წესის“ გამოყენებით იპოვეთ $f(x)=\left(x^2-5\right)^3$ ფუნქციის ექსტრემუმები.

**ამოხსნა.** ა) კუბში ახარისხებით მიიღება მრავალწევრი, ე.ი. $f(x)$ -ის განსაზღვრის არეა მთლიანად რიცხვითი ღერძ, წარმოებადია ყველგან, ე.ი. შეიძლება ქონდეს მხოლოდ სტაციონარული ტიპის კრიტიკული წერტილი.
ბ) ვიპოვოთ ისინი —

$$f'(x)=\left[\left(x^2-5\right)^3\right]'=3\left(x^2-5\right)^{3-1}\cdot\left(x^2-5\right)'=3\left(x^2-5\right)^2\cdot 2x, \quad \text{ანუ} \quad f'(x)=6x\left(x^2-5\right)^2.$$

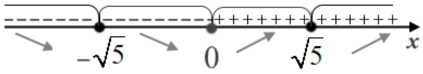
აქედან

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x\left(x^2-5\right)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2=5 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\pm\sqrt{5}.$$

მაშასადამე, სტაციონარული წერტილები (ზრდის მიხედვით დანომრილი) არის:

$$x_1=-\sqrt{5},\ x_2=0\ \ x_3=\sqrt{5}.$$

ამათ მიერ წარმოქმნილი ოთხი შუალედიდან, ორი მოთავსებულია უარყოფით რიცხვთა ნახევარ-ღერძზე. მათ წერტილებზე წარმოებული უარყოფითა—ეს ცხადია $f'(x)$ -ის ფორმულიდან. მომდევნო ორ შუალედზე წარმოებული დადებითია...მაშასადამე, გვაქვს „წარმოებულის ნიშნების ასეთი განაწილება“:



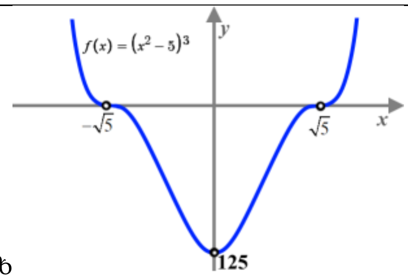

როგორც ვხედავთ, $f'(x)$ ნიშანს იცვლის მხოლოდ 0-ზე. ე.ი. ეს წერტილი არის $f(x)$ -ის ექსტრემუმის წერტილი. კერძოდ, ის მინიმუმის წერტილია, მნიშვნელობით —

$$f(0)=\left(x^2-5\right)^3\Big|_{x=0}=-5^3=-125.$$

ის მინიმუმის წერტილია. სინამდვილეში ის გლობალური (აბსოლუტური) მინიმუმის წერტილიც არის.

**პასუხი:** $y_{\min}=f(0)=-125$.

**შენიშვნა.** ეს ფარდობითი (ლოკალური) მინიმუმი იმავდროულად არის აბსოლუტური (გლობალური)— მოცემული ფუნქცია უფრო მცირე მნიშვნელობას არ ღებულობს — იხ. ნახ. N 8-ზ.




ნახ. N 8-ზ

**9-ა**

„მეორე რიგის წარმოებულის წესის“ გამოყენებით იპოვეთ $f(x)=x^3+3x^2+1$ ფუნქციის ექსტრემუმები.

**ამოხსნა.** (ა) ფუნქცია მოცემულია მრავალწევრის მეშვეობით. ე.ი. ის განსაზღვრულია და წარმოებადი ყველგან. მას შეიძლება ქონდეს მხოლოდ სტაციონარული წერტილები.
(ბ) ვიპოვოთ ისინი:

$$f'(x)=\left(x^3+3x^2+1\right)'=3x^2+6x=3x(x+2);$$

$$f'(x)=3x(x+2)$$

ამოვხსნათ განტოლება $f'(x)=0$ —

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x(x+2)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x+2=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-2.$$

ე.ი. სტაციონარული წერტილებია $x_1=-2,\ x_2=0$. „მეორე რიგის წარმოებულის წესის“ მიხედვით, ამათგან ექსტრემუმის წერტილია ის, რომელზეც მეორე რიგის წარმოებული განსხვავდება 0-გან.
ვიპოვოთ მეორე რიგის წარმოებული —

$$f''(x)=\left[f'(x)\right]'=\left(3x^2+6x\right)'=6x+6=6(x+1)$$

ანუ $f''(x)=6(x+1)$. გამოვთვალოთ მისი მნიშვნელობები სტაციონარულ წერტილებზე:

$$f''(-2)=6(-2+1)=-6;\ f''(0)=6(0+1)=6.$$

როგორც ვხედავთ, ორივე სტაციონარულ წერტილზე გვაქვს ექსტრემუმი. იმავე „მეორე რიგის წარმოებულის წესის“ მიხედვით, იქ სადაც მეორე რიგის წარმოებული დადებითა, გვაქვს მინიმუმი, სადაც უარყოფითია — მაქსიმუმი. ე.ი. $x_1=-2$ არის მაქსიმუმის წერტილი —

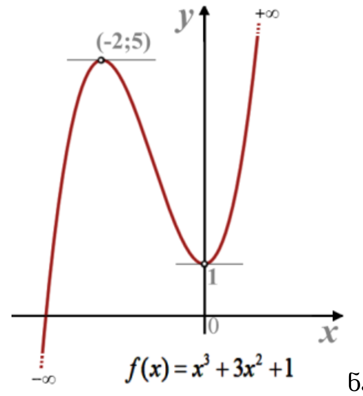
$$f_{\max}(-2)=\left(x^3+3x^2+1\right)_{x=-2}=-8+12+1=5.$$

ხოლო $x_2=0$ — მინიმუმის წერტილია —

$$f_{\min}(0)=\left(x^3+3x^2+1\right)_{x=0}=1.$$

**პასუხი.** $y_{\min}=f(0)=1,\quad y_{\max}=f(-2)=5$

შენიშვნა. ამ ფუნქციას გლობალური ექსტრემუმები არ გააჩნია, რადგან შეუძლია მიიღოს რაგინდ დიდი მნიშვნელობა, აბსოლუტური სიდიდით, ორივე ნიშნის. ეს ცხადია შემდეგი ფაქტიდან: როცა $x\to+\infty\ (-\infty)$, მაშინ $f(x)\to+\infty\ (-\infty)$, რაც ადვილად მოწმდება $1/f(x)$ შებრუნებულის სათანადო ზღვრების განხილვით — ორივე უსასრულოდ მცირეა. (იხ. ნახ. N 9-ა).



ნახ. N 9-ა

**9-დ**

„მეორე რიგის წარმოებულის წესის“ გამოყენებით იპოვეთ $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ ფუნქციის ექსტრემუმები.

**ამოხსნა.** (ა) ფუნქციის გამოსახულება შეიძლება გამოითვალოს $x$ ცვლადის ნებისმიერი არანულოვანი მნიშვნელობისთვის. ამიტომ განსაზღვრის არეა მთელი ღერძი, სათავის—0-ის, გარდა. ვიპოვოთ მისი I და II რიგის წარმოებულები:

$$f'(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)'=\left(x+x^{-1}\right)'=1-x^{-2}\ \text{ანუ}\ f'(x)=1-x^{-2};$$

$$f''(x)=\left[f'(x)\right]'=\left(1-x^{-2}\right)'=2x^{-3}\ \text{ანუ}\ f''(x)=2x^{-3}$$

ვიპოვოთ კრიტიკული წერტილები:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 1-x^{-2}=0\Leftrightarrow\frac{1}{x^2}=1\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1.$$

მაშასადამე სტაციონარული წერტილებია -1 და 1. ვიპოვოთ მათზე მეორე რიგის წარმოებულების მნიშვნელობები:

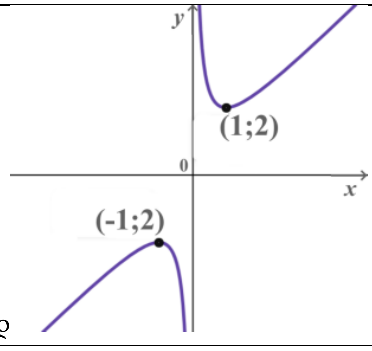
$$f''(-1)=-2;\ f''(1)=2.$$

„მეორე რიგის წარმოებულის წესის“ მიხედვით, -1 არის მაქსიმუმის წერტილი, ხოლო 1 — მინიმუმის: ამასთანავე

$$f_{\max}(-1)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\Big|_{x=-1}=-2;\ f_{\min}(1)=\left(1+\frac{1}{1}\right)\Big|_{x=1}=2.$$

**პასუხი.** $y_{\min}=f(1)=2,\quad y_{\max}=f(-1)=-2.$

**შენიშვნა:** ჩვენი გამოთვლების სისწორეზე მიუთითებს აქ მოყვანილი გრაფიკი (მართალია, ის აგებულია არგუმენტის სასრული უბნისთვის).



ნახ. N 9-დ

## 10-ა

იპოვეთ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+2$ ფუნქციის ექსტრემუმები, შუალედზე $0\le x\le 2$.

**ამოხსნა.** როგორც ვიცით, რომ ვიპოვოთ წარმოებადი $f(x)$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმი (მინიმუმი) $[a;b]$ სეგმენტზე, საკმარისია:

- ვიპოვოთ $f(x)$-ის სტაციონარული წერტილები, მოთავსებული ამ სეგმენტზე;
- ვიპოვოთ ამ ფუნქციის მნიშვნელობები ამ წერტილებზე და სეგმენტის $a$ და $b$ ბოლოებზე;
- მიღებულ რიცხვებს შორის ავარჩიოთ უდიდესი (უმცირესი).

ვიმოქმედოთ შესაბამისად.

(ა) ვიპოვოთ სტაციონარული წერტილები —

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-9x+2\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-9=x^2-9;$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3.$$

ე.ი. კრიტიკული წერტილებია $\pm 3$. ამათგან არცერთი არაა მოთავსებული „ოპტიმიზაციის“ $0\le x\le 2$ შუალედზე.

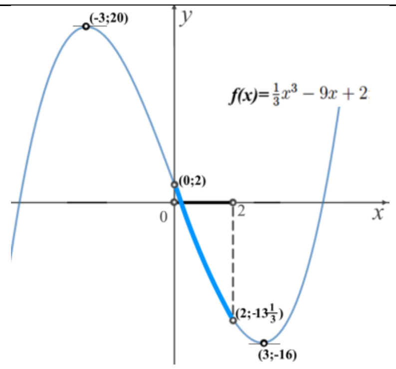
(ბ) ვიპოვოთ მნიშვნელობები ბოლოებზე — $f(0)$ და $f(2)$:

$$f(0)=\left(\frac{1}{3}x^3-9x+2\right)\Big|_{x=0}=2;\quad f(2)=\left(\frac{1}{3}x^3-9x+2\right)\Big|_{x=2}=\frac{8}{3}-18+2=-13\frac{2}{3}.$$

ცხადია აქედან $f(0)$ ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობაა, ხოლო $f(2)$ — უმცირესი, $0\le x\le 2$ შუალედზე.

**პასუხი.** $\min\limits_{0\le x\le 2} f(x)=f(2)=-13\frac{2}{3}$; $\max\limits_{0\le x\le 2} f(x)=f(0)=2$.

შენიშვნა. ამ შედეგებს ასახავს ფუნქციის გრაფიკიც (იხ. ნახ. 10ა ).




ნახ. 10ა.

## 10-ბ

იპოვეთ $f(t)=3t^5-5t^3$ ფუნქციის ექსტრემუმები, შუალედზე $-2\le t\le 0$.

**ამოხსნა.** რომ ვიპოვოთ წარმოებადი $f(t)$ ფუნქციის აბსოლუტური მაქსიმუმი (მინიმუმი) $[a;b]$ სეგმენტზე, საკმარისია:

- ვიპოვოთ $f(t)$-ის სტაციონარული წერტილები, მოთავსებული ამ სეგმენტზე;
- ვიპოვოთ ამ ფუნქციის მნიშვნელობები ამ წერტილებზე და სეგმენტის $a$ და $b$ ბოლოებზე;
- მიღებულ რიცხვებს შორის ავარჩიოთ უდიდესი (უმცირესი).

ვიმოქმედოთ შესაბამისად.

(ა) ვიპოვოთ სტაციონარული წერტილები—

$$f'(t)=\left(3t^5-5t^3\right)'=15t^4-15t^2=15t^2\left(t^2-1\right)=15t^2(t-1)(t+1);$$

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow 15t^2(t-1)(t+1)=0 \Leftrightarrow t=0 \vee t=\pm 1.$$

მაშასადამე, კრიტიკული წერტილებია -1, 0 და 1. ამათგან $-2\le t\le 0$ შუალედში მოთავსებულია მხოლოდ -1.

(ბ) გამოდის უნდა ვიპოვოთ ფუნქციის მნიშვნელობები წერტილებზე: -2, -1 და 0 —

$$f(-2)=\left(3t^5-5t^3\right)\Big|_{t=-2}=3\cdot(-32)-5\cdot(-8)=-56;$$

$$f(-1)=\left(3t^5-5t^3\right)\Big|_{t=-1}=3\cdot(-1)-5\cdot(-1)=2;$$

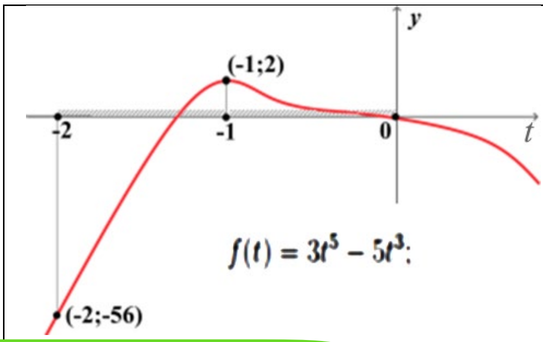
$$f(0)=0.$$

მიღებული მნიშვნელობებიდან უმცირესია -56, უდიდესი — +2. შესაბამისად, ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა $-2\le t\le 0$ შუალედზე არის -56, ხოლო უდიდესი — +2.

**პასუხი.**

$$\min_{-2\le t\le 0} f(t)=f(-2)=-56,$$
$$\max_{-2\le t\le 0} f(t)=f(-1)=2.$$

(იხ. ფუნქციის გრაფიკი, რომელიც $-2\le t\le 0$ შუალედზეა აგებული (ნახ. N 10-გ).)




ნახ. N 10-გ.

11

გადაწყვიტეს ავტობანის გასწვრივ მოეწყოს 5000 კვ. მ. კემპინგი, მართკუთხედის ფორმის. ის უნდა შემოიღობოს სამი მხრიდან — იმ გვერდებზე რომელიც არ ესაზღვრება მაგისტრალს. რა სიგრძე და სიგანე უნდა ქონდეს კემპინგს, რომ შემოსაღობად დაიხარჯოს მინიმალური სამშენებლო მასალა?

**ამოხსნა.** ასაშენებელ ღობეს აქვს ბერძნული ანბანის $\Pi$ (პი) ასოს ფორმა. ანუ, ის შეიცავს ორ ტოლ მონაკვეთს. აღვნიშნოთ თითოეული მათგანის სიგრძე $x$ ასოთი (მეტრი), ხოლო ამათგან განსხვავებულის — $y$ ასოთი (მეტრი).მაშინ კემპინგის განზომილებაა $x$ მ $\times$ $y$ მ. ამოცანის პირობით კემპინგის ფართობია 5000 მ². ამიტომ $x\cdot y=5000$. ღობის სიგრძეა $x+y+x$ ანუ $2x+y$, აქ, წინა ტოლობიდან $y=\frac{5000}{x}$. ამიტომ, თუ ღობის სიგრძეს აღვნიშნავთ $f(x)$ -ით, მისთვის გვექნება ფორმულა

$$f(x)=2x+\frac{5000}{x} \text{ სადაც } x>0.$$

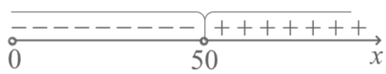
ცხადია, ჩვენ უნდა ვიპოვოთ ამ ფუნქციის აბსოლუტური მინიმუმი, $x>0$ შუალედზე.
(მოხდა ეკონომიკური შინაარსის ამოცანის — ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღების, დაყვანა მათემატიკურ ამოცანაზე).
ამის გადასაწყვეტად ვიპოვოთ $f(x)$ ფუნქციის წარმოებული:

$$f'(x)=\left(2x+\frac{5000}{x}\right)'=\left(2x+5000x^{-1}\right)'=2-5000x^{-2}=2-\frac{5000}{x^2}, \text{ ანუ } f'(x)=2-\frac{5000}{x^2},\ x>0.$$

ვიპოვოთ სტაციონარული წერტილი:

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-\frac{5000}{x^2}=0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=2500 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 50 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=50.$$

ე.ი. კრიტიკული წერტილია $x=50$. განსაზღვრის არეს ის დაყოფს ორ მონაკვეთად, რომელიც წარმოებულის ნიშან-მუდმივობის შუალედებია:




მართლაც, ავიღოთ პირველი შუალედიდან და ჩავსვათ წარმოებულის ფორმულაში $f'(x)=2-\frac{5000}{x^2}$. მივიღებთ $f'(1)=2-5000=-4998$. ე. ი. ამ შუალედზე $f'(x)<0$. მსგავსადვე დავრწმუნდებით, რომ მეორე შუალედში $f'(x)>0$.
ეს ამტკიცებს, რომ ღობის სიგრძის $f(x)$ ფუნქციას, $x=50$ წერტილზე აქვს უმცირესი მნიშვნელობა — გლობალური მინიმუმი. მისი მნიშვნელობაა

$$f_{\min}(50)=2\cdot 50+\frac{5000}{50}=100+100=200$$

როცა $x=50$, ღობის $y$ -ით აღნიშნული მონაკვეთის სიგრძე იქნება — $y=\frac{5000}{x}\Big|_{x=50}=\frac{5000}{50}=100$.

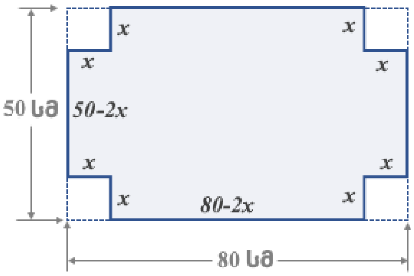
ამიტომ ამოცანის პასუხი ასეთია.

**პასუხი**. კემპინგის ღობის სიგრძე უმცირესია, როცა მისი ზომებია 50 მ X 100 მ და მაგისტრალს ესაზღვრება სიგრძეზე. (ღობის უმცირესი სიგრძეა 200 მეტრია)

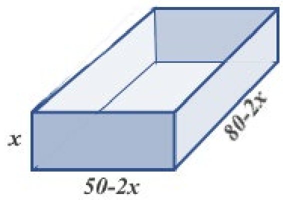
13

მართკუთხედის ფორმის თუნუქის ფირფიტიდან, რომლის ზომებია 50სმ X 80 სმ, აკეთებენ ყუთს ასე (ნახ. N13 ა): წვეროებიდან ჩამოაჭრიან ტოლ კვადრატებს, ნაპირებს გადაღუნავენ და ერთმანეთს აკავშირებენ (ნახ. N13 ბ). გამოთვალეთ, როგორი უნდა იყოს კვადრატების გვერდის სიგრძე, მიღებულ ყუთს რომ ქონდეს მაქსიმალური მოცულობა.

**ამოხსნა.** ჩამოჭრილი კვადრატების გვერდის სიგრძე აღვნიშნოთ $x$ სმ-ით (ნახ. N13 ა). ცხადია, $x$ ნაკლები უნდა იყოს თუნუქის უმცირესი გვერდის ნახევარზე — $0<x<25$.




ნახ. N13 ა.




ნახ. N13 ბ.

მიღებული კოლოფის (ნახ. N13 ბ) განზომილებებია: $x,\ 50-2x,\ 80-2x$ (ყველა სმ-ში). ამიტომ მისი მოცულობაა:

$$V(x)=x(50-2x)(80-2x)=4x(25-x)(40-x)=4x\left(x^2-65x+1000\right);$$

მოკლედ

$$V(x)=4x\left(x^2-65x+1000\right)\text{ სმ}^3,\ \text{ სადაც } 0<x<25\ (\text{სმ}).$$

ამრიგად, მოცემული საინჟინრო-ეკონომიკური ხასიათის ამოცანა — ოპტიმალური გადაწყვეტილების მიღებაზე, დაყვანილია ფუნქციის ექსტრემუმის მოძებნის მათემატიკურ ამოცანაზე. ამოვხსნათ ის, პირველი რიგის წარმოებულის წესით. ამისთვის ვიპოვოთ $V(x)$ ფუნქციის წარმოებული:

$$V'(x)=4\left[x\left(x^2-65x+1000\right)\right]'=4\left[x'\left(x^2-65x+1000\right)+x\left(x^2-65x+1000\right)'\right]=$$

$$=4\left[x^2-65x+1000+x(2x-65)\right]=4\left(3x^2-130x+1000\right)$$

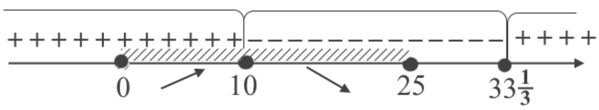
მოკლედ

$$V'(x)=4\left[3x^2-130x+1000\right].$$

ვიპოვოთ სტაციონარული წერტილები —

$$V'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-130x+1000=0\Leftrightarrow x=\frac{130\pm\sqrt{130^2-12000}}{6}\Leftrightarrow x=\frac{130\pm 70}{6}.$$

ე.ი. სტაციონარული წერტილებია: $x_1=33\frac{1}{3},\ x_2=10$. მოვნიშნოთ ესენი რიცხვით ღერძზე. ადვილად დავრწმუნდებით (გნებავთ შუალედებიდან წარმომადგენლებზე $V'(x)$-ის ნიშნის გასინჯვით, გნებავთ კვადრატული ფუნქციის გრაფიკის მეშვეობით), რომ წარმოებული უარყოფითია სტაციონარულ წერტილებს შორის, მათ გარეთ კი — დადებითი; ამას ასახავს შემდეგი დიაგრამა, რომელზეც დაშტრიხულია ოპტიმიზაციის $0<x<25$ შუალედიც:




ოპტიმიზაციის $0<x<25$ შუალედზე მოთავსებულია სტაციონარული წერტილი 10. ამ შუალედზე, 10-ის მარცხნივ $V'(x)$ დადებითია, მარჯვნივ — უარყოფითი. ე.ი. ოპტიმიზაციის შუალედზე ფუნქცია $V(x)$ ჯერ იზრდება, ვიდრე მიაღწევს წერტილს $x=10$, შემდეგ კლებულობს. ანუ, $x=10$ არის აბსოლუტური მაქსიმუმის წერტილი. ამ აბსოლუტურ მაქსიმუმის მნიშვნელობაა —

$$\max_{0<x<25}V(x)=V(10)=4x(x-25)(x-40)\Big|_{x=10}=4\cdot10\cdot15\cdot30=18000\text{ სმ}^3=18\text{ დმ}^3=18\text{ ლ}.$$

**პასუხი**. კოლოფის მოცულობა უდიდესია, როდესაც დამზადების დროს თუნუქს წვეროებთან ჩამოაჭრიან 10 სმ გვერდის კვადრატებს; ეს უდიდესი მოცულობა არის 18 ლიტრი.